پاسخنامه سری اول تمرینات ریاضی عمومی 1

1- کدام یک از توابع زیر با تابع $y = x + 2$ برابر است؟

جواب: دامنه تابع $y = x + 2$ برابر است با $\mathbb{R}$. حال دامنه و ضابطه توابع داده شده را بررسی میکنیم.

1) $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}^2 - 4}{\boldsymbol{x} - 2} = \dfrac{(\boldsymbol{x}-2)(\boldsymbol{x}+2)}{\boldsymbol{x}-2} = \boldsymbol{x} + 2$ $\qquad \boldsymbol{D} = \mathbb{R} - \{2\}$

2) $\boldsymbol{y} = 2 + \sqrt{\boldsymbol{x}^2} = 2 + |\boldsymbol{x}|$ $\qquad \boldsymbol{D} = \mathbb{R}$

3) $\boldsymbol{y} = \dfrac{\boldsymbol{x}^3 + 2\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} + 2}{\boldsymbol{x}^2 + 1} = \dfrac{(\boldsymbol{x}^2+1)(\boldsymbol{x}+2)}{\boldsymbol{x}+2} = \boldsymbol{x} + 2$ $\qquad \boldsymbol{D} = \mathbb{R}$

4) $\boldsymbol{y} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + 4\boldsymbol{x} + 4} = \sqrt{(\boldsymbol{x}+2)^2} = |\boldsymbol{x} + 2|$ $\qquad \boldsymbol{D} = \mathbb{R}$

بنابراین تنها تابع سوم شرایط برابری را داراست.

2- برد تابع $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ را بدست آورید.

جواب: اگر $x = 0$ آنگاه $f(x) = 0$. بنابراین $0 \in R_f$. حال فرض میکنیم $x \neq 0$. لذا خواهیم داشت

$$\boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{x}}{1 + \boldsymbol{x}^2} \Rightarrow \boldsymbol{y}(1 + \boldsymbol{x}^2) = \boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 0$$

معادله فوق معادله ایست درجه دوم بر حسب x و در صورتی دارای جواب است که $\Delta \geq 0$. ازاین رو

$$\Delta = (-1)^2 - 4\boldsymbol{y}\boldsymbol{y} = 1 - 4\boldsymbol{y}^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 4\boldsymbol{y}^2 \Rightarrow \boldsymbol{y}^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow |\boldsymbol{y}| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} \leq \boldsymbol{y} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{R_f} = \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

3- توابع زیر را از نظر زوج یا فرد بودن بررسی کنید.

جواب:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{|\boldsymbol{x} - 1| - |\boldsymbol{x} + 1|}{|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{\cos x}} \Rightarrow \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \frac{|-\boldsymbol{x} - 1| - |-\boldsymbol{x} + 1|}{|-\boldsymbol{x}|(-\boldsymbol{x})^2 - \boldsymbol{\cos}(-\boldsymbol{x})} = \frac{|\boldsymbol{x} + 1| - |\boldsymbol{x} - 1|}{|\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{\cos x}} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \text{فرد است } \boldsymbol{f}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}\frac{1 - \boldsymbol{x}}{1 + \boldsymbol{x}} \Rightarrow \boldsymbol{g}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{ln}\frac{1 + \boldsymbol{x}}{1 - \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{ln}\left(\frac{1 - \boldsymbol{x}}{1 + \boldsymbol{x}}\right)^{-1} = -\boldsymbol{ln}\frac{1 - \boldsymbol{x}}{1 + \boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \Rightarrow \text{فرد است } \boldsymbol{g}$$

4- دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

$$\boldsymbol{y} = \frac{\sqrt[4]{\boldsymbol{x}^3}}{[\boldsymbol{x}]^2 - 4} : \begin{cases} \boldsymbol{x}^3 \geq 0 \\ [\boldsymbol{x}]^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ [\boldsymbol{x}]^2 \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ [\boldsymbol{x}] \neq \pm 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \notin [-2, -1) \cup [2, 3) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{D} = [0, 2) \cup [3, +\infty)$$

$$y=\sqrt{2\,\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}-1}: 2\,\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}-1\geq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}\geq \frac{1}{2}\Longrightarrow \frac{\boldsymbol{\pi}}{6}+2\boldsymbol{k\pi}\leq \boldsymbol{x}\leq \frac{5\boldsymbol{\pi}}{6}+2\boldsymbol{k\pi}\quad (\boldsymbol{k}\in \mathbb{Z})$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{D}=\bigcup_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}}[\frac{(12\boldsymbol{k}+1)\boldsymbol{\pi}}{6},\frac{(12\boldsymbol{k}+5)\boldsymbol{\pi}}{6}]$$

$$y=\sqrt{2-\boldsymbol{log}_2(1-\boldsymbol{x})}:\begin{cases}1-x>0\\ 2-\boldsymbol{log}_2(1-\boldsymbol{x})\geq 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}1-x>0\\ \boldsymbol{log}_2(1-\boldsymbol{x})\leq 2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}1-x>0\\ 1-x\leq 2^2\end{cases}\Longrightarrow 0<1-\boldsymbol{x}\leq 4$$

$$\Longrightarrow -1<-\boldsymbol{x}\leq 3\Longrightarrow 1>\boldsymbol{x}\geq -3\Longrightarrow \boldsymbol{D}=[-3,1)$$

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{ln}\left|\frac{1}{[\boldsymbol{x}]+[-\boldsymbol{x}]}\right|:\left|\frac{1}{[\boldsymbol{x}]+[-\boldsymbol{x}]}\right|>0\left(\boldsymbol{but}:[\boldsymbol{x}]+[-\boldsymbol{x}]=\begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}\right)\Longrightarrow\ \boldsymbol{x}\notin\mathbb{Z}\Longrightarrow \boldsymbol{D}=\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

$$\boldsymbol{y}=\frac{1}{1-\boldsymbol{cot}\frac{2\boldsymbol{x}}{3}}:\begin{cases}1-\boldsymbol{cot}\frac{2\boldsymbol{x}}{3}\neq 0\\ \frac{2\boldsymbol{x}}{3}\neq k\pi\ (\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z})\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{cot}\frac{2\boldsymbol{x}}{3}\neq 1=\boldsymbol{cot}\frac{\boldsymbol{\pi}}{4}\\ x\neq\frac{3\boldsymbol{k\pi}}{2}(\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z})\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{2\boldsymbol{x}}{3}\neq\frac{\boldsymbol{\pi}}{4}+k\pi\\ x\neq\frac{3\boldsymbol{k\pi}}{2}\end{cases}\quad(\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z})$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{D}=\mathbb{R}-\left\{\frac{(12\boldsymbol{k}+3)\boldsymbol{\pi}}{8},\frac{3\boldsymbol{k\pi}}{2}:(\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z})\right\}$$

$$\boldsymbol{y}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{x}+2}{\boldsymbol{x}^3-7\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}}}:\frac{\boldsymbol{x}+2}{\boldsymbol{x}^3-7\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}}\geq 0\Longrightarrow\frac{\boldsymbol{x}+2}{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2-7\boldsymbol{x}+6)}\geq 0$$

به کمک تعیین علامت دامنه را مشخص میکنیم.

$\boldsymbol{x}$	-2	0	1	6	
$\boldsymbol{x}+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\boldsymbol{x}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\boldsymbol{x}^2-7\boldsymbol{x}+6$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$
$\frac{\boldsymbol{x}+2}{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^2-7\boldsymbol{x}+6)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{D}=(-\infty,-2]\cup(0,1)\cup(6,+\infty)$$

5- **یک به یک بودن توابع زیر را روی مجموعه داده شده بررسی کنید.**

جواب: جهت بررسی یک به یک بودن توابع زیر یکنوایی اکید بودن آن ها را به کمک آزمون یکنوایی نشان میدهیم.

$$f(x)=\frac{x}{1-x^2} \qquad x\in(-1,1)$$

$$g(x)=x+\cos x \qquad x\in\mathbb{R}$$

6- موارد خواسته شده را محاسبه کنید.

$$\sin\frac{7\pi}{8}=\sin(\pi-\frac{\pi}{8})=\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12})=-\sin\frac{\pi}{12}=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{2\pi}{12}}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\tan(-\frac{11\pi}{4})=-\tan(3\pi-\frac{\pi}{4})=-\tan\frac{-\pi}{4}=\tan\frac{\pi}{4}=1$$

$$\csc\left(\frac{95\pi}{6}\right)=\csc(16\pi-\frac{\pi}{6})=\csc(-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{\sin\frac{-\pi}{6}}=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$$

$$\log_2\log_4\log_8 64=\log_2\log_4\log_8 8^2=\log_2\log_{2^2}2\log_8 8=\log_2\frac{1}{2}\log_2 2=\log_2 2^{-1}=-1$$

$$\log_2 3^{\ln 4}=\ln 4\,.\log_2 3=\ln 2^2\,.\frac{\ln 3}{\ln 2}=2\ln 2\,.\frac{\ln 3}{\ln 2}=2\ln 3=\ln 3^2=\ln 9$$

$$\log_4 0.0625=\log_4\frac{625}{10000}=\log_{2^2}(\frac{5}{10})^4=\frac{4}{2}\log_2\frac{1}{2}=2\log_2 2^{-1}=-2\log_2 2=-2$$

7- خط گذرنده از جفت نقاط $(-2,4)$ و $(3,-1)$ را L مینامیم. معادله L بدست آورید. فاصله L را از خط $y+x=7$ بدست آورید. زاویه میل L چقدر است؟ L محورها را در چه نقاطی قطع میکند؟ عمود منصف پاره خط واصل جفت نقاط داده شده را بدست آورید. زاویه و محل برخورد L و خط $y=3x+4$ را محاسبه کنید.

$$m_L=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{-1-4}{3-(-2)}=\frac{-5}{5}=-1 \Rightarrow L:\ y=m_L(x-x_0)+y_0=-1(x-3)-1=-x+2$$

$$y+x=7\Rightarrow y=-x+7$$

در نتیجه دو خط موازی هستند و برای بدست آوردن فاصله آن ها کافی است فاصله یک نقطه از خط L را از خط داده شده بدست آوریم.

برای مثال فاصله نقطه $(0,2)$ از خط L را از خط داده شده محاسبه میکنیم.

$$x+y-7=0\ \&\ (x_0,y_0)=(0,2)\Rightarrow d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\times0+1\times2-7|}{\sqrt{0^2+2^2}}=\frac{5}{2}$$

$$\theta_L=\tan^{-1}m=\tan^{-1}(-1)=\frac{3\pi}{4}$$

محل برخورد با محور افقی : $y=0=-x+2\Rightarrow x=2$

محل برخورد با محور عمودی : $\boldsymbol{x} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x} + 2 = 2$

نقطه میانی بین جفت نقاط داده شده برابر است با $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3-2}{2}, \frac{-1+4}{2}\right) = \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right) = \boldsymbol{M}$ **و شیب خط عمود نیز برابر است با** $1 = \frac{-1}{-1} = \frac{-1}{\boldsymbol{m_L}} = \boldsymbol{m}$**. بنابراین معادله عمود منصف به صورت زیر است.**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{m}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_M}) + \boldsymbol{y_M} = \left(\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} = \boldsymbol{x} + 1$$

شیب خط $\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{x} + 4$ **برابر است با 3. بنابراین این خط و خط** $\boldsymbol{L}$ **متقاطع هستند. زاویه بین آن ها برابر است با**

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{tan}^{-1}\frac{\boldsymbol{m}_2 - \boldsymbol{m}_1}{1 + \boldsymbol{m}_1\boldsymbol{m}_2} = \mathbf{tan}^{-1}\frac{3 - (-1)}{1 + 3 \times -1} = \mathbf{tan}^{-1}\frac{4}{-2} = \mathbf{tan}^{-1} -2$$

محل برخورد دو خط از حل دستگاه زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} y = 3x + 4 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Longrightarrow 3\boldsymbol{x} + 4 = -\boldsymbol{x} + 2 \Longrightarrow 4\boldsymbol{x} = -2 \Longrightarrow \ \boldsymbol{x} = \frac{-1}{2} \Longrightarrow \ \boldsymbol{y} = \frac{5}{2}$$