پاسخنامه سری دوم تمرینات ریاضی عمومی 1

وارون تابع زیر را بدست آورید.

$$y = 4\cos^{-1}\sqrt{1-\ln(\tan x)} \Rightarrow \frac{y}{4} = \cos^{-1}\sqrt{1-\ln(\tan x)} \Rightarrow \cos\frac{y}{4} = \sqrt{1-\ln(\tan x)}$$

$$\Rightarrow \cos^2\left(\frac{y}{4}\right) = 1-\ln(\tan x) \Rightarrow \ln(\tan x) = 1-\cos^2\left(\frac{y}{4}\right) = \sin^2\left(\frac{y}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \tan x = e^{\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)} \Rightarrow \quad x = \tan^{-1}\left(e^{\sin^2\left(\frac{y}{4}\right)}\right)$$

حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-|x-1|-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+(x-1)-1}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x-2}{-(x-1)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x+2)(x-1)}{-(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -(x+2) = -3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{xe^{2x}-x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^{-1}3x}{x}\times\frac{1}{e^{2x}-x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}3x}{x} = 3$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left([x]+[x^2]+\cdots+[x^{100}]\right) = \lim_{x\to 0^-}\left([x]+[x^3]+\cdots+[x^{99}]\right) + \lim_{x\to 0^-}\left([x^2]+[x^4]+\cdots+[x^{100}]\right)$$

$$= (-1-1-\cdots-1)+(0+0+\cdots+0) = -50$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})\times\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+4-x}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi\sin x)}{x} = \lim_{\sin x\to 0}\frac{\sin(\pi\sin x)}{\sin x} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin(\pi z)}{z} = \pi$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(2+e^x)}{3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln e^x}{3x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\sqrt{\csc x} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x^2}{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{x}{\frac{\sin x}{x}}} = \sqrt{\frac{0}{1}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} (x-\sqrt{x+x^2}) = \lim_{x\to\infty} (x-\sqrt{x+x^2})(\frac{x+\sqrt{x+x^2}}{x+\sqrt{x+x^2}}) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x+x^2)}{x+\sqrt{x+x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+\sqrt{x+x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+x\sqrt{\frac{1}{x}+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)} = \lim_{x\to1}\frac{x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} : \lim_{x\to0^-}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1+2^{-\infty}}{3+2^{-\infty}} = \frac{1}{3} \neq \lim_{x\to0^+}\frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to0^+}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}} = 1 \implies$$ حد اولیه وجود ندارد .

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 10x}{\sin 5x} = \frac{\sin\frac{10\pi}{2}}{\sin\frac{5\pi}{2}} = \frac{\sin 5\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = 0$$

پیوستگی توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$$

بنابر اصل تمامیت اعداد حقیقی که بیان میکند بین هر دو عدد حقیقی (گویا) بی نهایت عدد حقیقی (گویا و گنگ) وجود دارد لذا تابع داده شده در تمام نقاط ناپیوسته میباشد.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2\sqrt{1-\cos 2x}}{1-\cos x} & x \neq 0 \\ \sqrt{a-1} & x = 0 \end{cases}$$

واضح است که بنابر تعریف تابع، در نقاطی که مخرج کسر صفر است تابع تعریف نشده است و لذا پیوسته نمی باشد.

$$1-\cos x = 0 \implies x = 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}-\{0\}$$

از روابط مثلثاتی داریم:

$$g(x)=\frac{x^2\sqrt{1-\cos 2x}}{1-\cos x}=\frac{x^2\sqrt{2\sin^2 x}}{1-\cos x}=\frac{\sqrt{2}x^2|\sin x|}{1-\cos x}\qquad x\neq 0$$

در نقاطی که تابع سینوس تغییر علامت می دهد ممکن است تابع دارای حد نباشد و بنابراین پیوسته نشود. اما از این نقاط تابع در $x=2k\pi$ تعریف نشده است و در $x=(2k+1)\pi$ هم بنابر تعریف دارای حد صفر است. تنها بررسی پیوستگی در نقطه $x=0$ باقی میماند.

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sqrt{1-\cos 2x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}x^2|\sin x|}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}|\sin x|}{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=\frac{\sqrt{2}\times 0}{\frac{2}{4}\times 1}=0$$

بنابراین اگر $g(0)=\sqrt{a-1}=0$ باشد آنگاه تابع در $x=0$ پیوسته است و در غیر این صورت تابع ناپیوسته خواهد بود.